
Samenvatting

Stel je bent doorgedrongen tot de laatste ronde van een televisiequiz. Je kunt een auto winnen, die achter een van drie deuren staat. De quizmaster vraagt je een deur te kiezen. Nadat je een deur gekozen hebt, moet de quizmaster je helpen. Hij weet waar de auto staat en moet een deur openmaken die je niet gekozen hebt en waar de auto niet achter staat. Nu mag je nog eens kiezen tussen de overgebleven deuren. Als de auto achter de deur staat die je uiteindelijk kiest win je de auto. De vraag is of het voordelig is om van je initiële keuze af te wijken en dus de andere deur te kiezen. Dit is het Monty Hall Dilemma, genoemd naar een quizmaster uit de Verenigde Staten. Het was een van de problemen die de aanleiding vormde voor mijn promotieonderzoek.

De voor velen tegenintuïtieve oplossing van het Monty Hall Dilemma is dat het voordelig is om van je initiële keuze af te wijken. Je wint dan de auto in twee derde van de gevallen. Om deze conclusie te trekken moet rekening gehouden worden met de kennis van de quizmaster, de waarschijnlijkheid dat de auto achter een deur staat en de informatieverandering die optreedt ten gevolge van het openen van een deur. Dit proefschrift gaat over de logica van kennis, waarschijnlijkheid, en verandering.

Logica wordt gebruikt bij onder andere informatica, wiskunde, wijsbegeerte, taalkunde, rechtsgeleerdheid en kunstmatige intelligentie. In de logica houdt men zich bezig met redeneringen en dan vooral met de vraag of een redenering klopt. Bij het beantwoorden van deze vraag wordt niet gekeken naar specifieke redeneringen, maar kijkt men naar de abstracte vorm van redeneringen. Dit gebeurt door redeneringen te vertalen naar een logische taal. Zo kunnen de redeneringen “Alle mensen zijn sterfelijk en Socrates is een mens. Dus Socrates is sterfelijk” en “Alle honden zijn vals en Lassie is een hond. Dus Lassie is vals” na vertaling dezelfde vorm hebben. Zo’n logische taal is toegesneden op redeneringen waarbij een bepaald aspect centraal staat. Zo ontstaan allerlei logica’s, elk met een eigen toepassingsgebied. Bij kennislogica, probabilistische logica en dynamische logica staan respectievelijk kennis, waarschijnlijkheid en verandering centraal; de aspecten die bij het Monty Hall Dilemma een rol spelen. Deze logica’s komen ook aan

bod in dit proefschrift.

In *kennislogica* ligt de nadruk op redeneringen waarbij kennis centraal staat. Redeneren over kennis is vooral interessant in situaties waarbij meerdere personen betrokken zijn. Dan kan iemand iets weten over wat iemand anders weet of niet weet. Dergelijke *hogere-orde kennis* speelt in veel situaties een cruciale rol. Zo begon tijdens de eerste Golfoorlog de operatie “Desert Storm” met de vernietiging van een aantal radarsystemen van Irak. Op die manier hadden de Verenigde Staten een voordeel boven Irak, omdat ze gebruik konden maken van hun kennis dat Irak bepaalde informatie niet meer had. Hoofdstuk 2 is een inleiding op de kennislogica.

Hoofdstuk 5 gaat over *probabilistische logica*. Hierbij richt men zich op redeneringen over waarschijnlijkheden. In filosofische debatten over waarschijnlijkheid worden theorieën, over de vraag wat waarschijnlijkheid is, in twee categorieën verdeeld. In de ene categorie wordt waarschijnlijkheid als deel van de werkelijkheid gezien. Als bijvoorbeeld een knikker uit een vaas met knikkers wordt gepakt is de waarschijnlijkheid dat de knikker groen is, de relatieve verhouding van groene knikkers. Bij de andere wordt waarschijnlijkheid gezien als iets wat de graad van vertrouwen van iemand uitdrukt. Als bijvoorbeeld een dobbelsteen onder een beker ligt, is de waarschijnlijkheid dat de uitkomst zes is de relatieve verhouding van zes in alle uitkomsten die de waarnemer voor mogelijk houdt. In het eerste geval worden waarschijnlijkheden toegekend aan objecten (aan iedere knikker wordt een waarschijnlijkheid toegekend om gepakt te worden), in het tweede geval aan situaties (aan iedere mogelijke uitkomst wordt een waarschijnlijkheid toegekend door de waarnemer). Ik laat zien hoe de logica’s die bij deze twee perspectieven horen aan elkaar gerelateerd zijn.

Dynamische logica spitst zich toe op redeneringen over veranderingen, zoals die bijvoorbeeld optreden in een computer ten gevolge van het uitvoeren van een computerprogramma. Men kan met dynamische logica bewijzen dat een computerprogramma doet wat het behoort te doen. Dat is voor veel programma’s van essentieel belang. In hoofdstuk 3 worden enkele technische resultaten over propositionele dynamische logica gepresenteerd. Met propositionele dynamische logica worden redeneringen over eenvoudige computerprogramma’s bestudeerd. Stel bijvoorbeeld dat gegeven is dat p geldt nadat het programma a wordt uitgevoerd. Bovendien is gegeven dat p ook geldt nadat het programma a twee keer wordt uitgevoerd. Enzovoorts. Uit al deze gegevens – oneindig veel – kan geconcludeerd worden dat p geldt nadat programma a willekeurig vaak herhaald wordt. In de gebruikelijke bewijssystemen voor deze logica kan dit echter niet bewezen worden omdat daarin slechts eindige redeneringen bestudeerd worden. In het bewijssysteem dat in hoofdstuk 3 gepresenteerd wordt, kunnen oneindige redeneringen wel bestudeerd worden.

Elk van de bovengenoemde logica’s richt zich dus op een van de aspecten die bij het Monty Hall Dilemma van belang zijn. De laatste jaren is grote interesse uitgegaan naar logica’s voor twee van deze aspecten, namelijk combinaties van dy-

namische logica en kennislogica. Dynamische kennislogica, waarmee redeneringen over verandering van kennis bestudeerd kunnen worden, wordt in hoofdstuk 4 behandeld. Dynamische kennislogica onderscheidt zich van andere vakgebieden die zich bezighouden met informatieverandering doordat de verandering van hogere-orde kennis centraal staat, dat wil zeggen dat rekening wordt gehouden met de verandering van kennis over andermans kennis.

Voor het Monty Hall Dilemma is echter een combinatie van kennislogica, probabilistische logica en dynamische logica nodig. Deze logica wordt ontwikkeld in hoofdstuk 6. Ik definieer een logische taal waarin redeneringen over zowel kennis, waarschijnlijkheden als verandering uitgedrukt kunnen worden. Tevens geef ik aan wanneer een uitspraak in die logische taal waar is en wanneer onwaar. Bovendien wordt een bewijssysteem verschaft dat bestaat uit axioma's en afleidingsregels. Hiermee kan stap voor stap worden aangetoond dat een redenering klopt. Deze logica is uitermate geschikt voor de analyse van redeneringen over kennis, waarschijnlijkheid en verandering.

De analyse van het Monty Hall Dilemma met een probabilistische dynamische kennislogica staat in hoofdstuk 7. De redenering, die als conclusie heeft dat de auto met een kans van twee derde achter de overgebleven deur zit die in eerste instantie niet gekozen werd, wordt vertaald naar de logische taal van probabilistische dynamische kennislogica. Met het bewijssysteem kan aangetoond worden dat deze redenering klopt.